

Ableitung

$$f(x) = x^r$$

$$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$$

Potenzregel

$$f(x) = r \cdot g(x)$$

$$f'(x) = r \cdot g'(x)$$

Faktorregel

$$f(x) = k(x) + h(x)$$

$$f'(x) = k'(x) + h'(x)$$

Summenregel

$f'(x)$ streng monoton wachsend oder $f''(x) > 0$

↳ Linkskurve

$f'(x)$ streng monoton fallend oder $f''(x) < 0$

↳ Rechtskurve

Extremstellen

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) < 0$$

↳ f hat an x_0 Maximum

$$f'(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f''(x_0) > 0$$

↳ f hat an x_0 Minimum

Wendestelle

f hat bei x_0 eine Wendestelle, wenn

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad \text{VZW bei } f'' \quad \text{oder}$$

$$f''(x_0) = 0 \quad \text{und} \quad f'''(x_0) \neq 0$$

Tangentengleichung

$$t: y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$$

Normalengleichung

$$n: y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$$

Verkettung

$f = u \circ v$ ist Verkettung der Funktionen u und v

$$f(x) = u(v(x))$$

$$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$$

Produktregel

$$f(x) = u(x) \cdot v(x)$$

$$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

natürliche Exponentialfunktion

$$f(x) = e^x$$

$$f'(x) = e^x$$

$$e^x = b$$

$$x = \ln(b)$$

Differential- & Integralrechnung

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

Stammfunktionen (Aufleiten)

$$f(x) = x^r \quad F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$$

$$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \quad F(x) = \ln(|x|)$$

$$f(x) = x^{-2} \quad F(x) = -x^{-1}$$

Rechenregeln

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

$$F(x) = G(x) + H(x)$$

$$f(x) = c \cdot g(x)$$

$$F(x) = c \cdot G(x)$$

$$f(x) = g(c \cdot x + d)$$

$$F(x) = \frac{1}{c} \cdot G(c \cdot x + d)$$

Integral-Rechenregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x) dx = c \cdot \int_a^b f(x) dx$$

$$\int_a^b (g(x) + h(x)) dx = \int_a^b g(x) dx + \int_a^b h(x) dx$$

Mittelwert

$$\bar{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$$

Rotationskörper

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2 dx$$

Integralfunktion

$$I_0(x) = \int_0^x f(t) dt$$

Achsensymmetrie

$$f(-x) = f(x)$$

Punktsymmetrie

$$f(-x) = -f(x)$$

senkrechte Asymptote

wenn $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

mit $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) = 0$

ist bei x_0 eine senkrechte Asymptote (= Definitionslücke)

Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$

Das Verhalten für $x \rightarrow \pm\infty$ von $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ wird durch den Grad z des Zählers und den Grad n des Nenners bestimmt.

Für $z < n$ ist $f(x) \rightarrow 0$ (x -Achse = waagerechte Asymptote)

Für $z = n$ ist $f(x) \rightarrow c$ ($y=c$ ist waagerechte Asymptote)

Für $z > n$ ist $f(x) \rightarrow +\infty$ oder $f(x) \rightarrow -\infty$

Bei Funktionen die x^n und e^x enthalten gilt

für $x \rightarrow \infty$ ist

$$\frac{x^n}{e^x} \rightarrow 0$$

$$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow \infty$$

$$x^n \cdot e^x \rightarrow \infty$$

$$e^x - x^n \rightarrow \infty$$

für $x \rightarrow -\infty$ ist

$$\left| \frac{x^n}{e^x} \right| \rightarrow \infty$$

$$\frac{e^x}{x^n} \rightarrow 0$$

$$|x^n \cdot e^x| \rightarrow 0$$

$$e^x - x^n \rightarrow -\infty$$

$$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$$

- Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$

- Amplitude: ~~am~~ $|a|$

- Verschiebung: um c in x -Richtung und d in y -Richtung.

Ortskurve

= D. alle Hochpunkte einer Funktionschar^f auf Kurve.

Bestimmung von P_t als Punkt auf Funktion. Dann wird Darstellung der x - y -Koordinaten den Parameter t eliminieren.

Folgen \mathbb{N} in \mathbb{R}

- rekursive vs explizite Darstellung
- monoton wachsend ($a(n+1) \geq a(n)$)
monoton fallend ($a(n+1) \leq a(n)$)
- nach oben oder unten beschränkt durch Schranke S
- Grenzwert g : $a(n) \rightarrow g$

Exponentielles Wachstum

mit Wachstumsfaktor a

$$B(n) = B(0) \cdot a^n$$

$$f(x) = f(0) \cdot a^x$$

$$B(n) = B(0) \cdot e^{kn}$$

$$f(x) = f(0) \cdot e^{kx}$$

$$f'(x) = k \cdot f(x)$$

Beschränktes Wachstum

mit Schranke S

$$B(n) = S - c \cdot a^n$$

$$f(x) = S - c \cdot a^x$$

$$B(n) = S - c \cdot e^{-kn}$$

$$f(x) = S - c \cdot e^{-kx}$$

$$f'(x) = k \cdot (S - f(x))$$

Gauß-Verfahren

1. LGS in Stufenform durch umformen
2. Schrittweise auflösen

Lösungen

Eine, keine oder unendlich viele

Vektoren

Gerade

Parametergleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v}$$

Stützvektor \vec{p} und Richtungsvektor \vec{v}

Länge von Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \text{ für } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a}_0 = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \quad |\vec{a}_0| = 1$$

Ebene

Parametergleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{v} + s \cdot \vec{w}$$

Normalengleichung

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

Koordinatengleichung

$$ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$\vec{n} \cdot \vec{v} = \vec{n} \cdot \vec{w} = 0$$

aus-multiplizieren $\vec{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Gegenseitige Lage von Ebenen & Geraden

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix}$$

$$E: ax_1 + bx_2 + cx_3 = d$$

$$\hookrightarrow a(p_1 + r \cdot u_1) + b(p_2 + r \cdot u_2) + c(p_3 + r \cdot u_3) = d$$

Bei einer Lösung \rightarrow Schneiden

Keine Lösung \rightarrow Parallel

Unendlich Lösungen \rightarrow ~~Parallel~~ liegt in E

Gegenseitige Lage von Ebenen

in Parametergleichungen

1. Gleichsetzen

2. LGS Lösen

in Koordinatenform

1. LGS aufstellen & Lösen

Ebenen sind entweder parallel, identisch oder haben Schnittgerade.

Abstand Punkt - EbenePunkt: $P(x_1 | x_2 | x_3)$ und Ebene E

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n}_E|$$

$$d = \left| \frac{a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

Abstand Punkt - Gerade

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$R(x_1 | x_2 | x_3)$$

$$1. \text{ Es ist } \overrightarrow{P_t R} \cdot \vec{u} = 0$$

2. Nach t auflösen

$$3. \text{ Abstand } d = |\overrightarrow{P_t R}|$$

Abstand windschiefer Geraden

$$\text{Geraden } g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$$

$$h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$$

Grund H sind Punkte von g und h .

$$\text{Wenn } \overrightarrow{GH} \cdot \vec{u} = 0$$

$$\overrightarrow{GH} \cdot \vec{v} = 0$$

ist $|\overrightarrow{GH}|$ der Abstand von g zu h Winkel zwischen Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Schnittwinkel

Geometrische
Probleme

Gerade - Gerade

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

\vec{u} und \vec{v} sind die Richtungsvektoren

Ebene - Ebene

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| \cdot |\vec{n}_2|}$$

\vec{n}_1 und \vec{n}_2 sind die Normalenvektoren

Gerade - Ebene

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

\vec{u} ist Richtungsvektor, \vec{n} ist Normalenvektor

Spiegelung

Punkt

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}$$

mit Punkt P, Bildpunkt P' und Zentrum Z

Gerade/Ebene

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$$

mit Punkt P, Bildpunkt P' und Lotfußpunkt

F von P auf g/E

Bernoulli-Versuch (genau 2 Ausg, 2-erger)

Wahrscheinlichkeit
p

Bernoulli-Formel: $P(X=r) = \text{BinomP}(n) = \binom{n}{r} \cdot p^r \cdot (1-p)^{n-r}$

Länge n ; Trefferschwanzwahrscheinlichkeit p ; Anzahl Treffer r
Erwartungswert $\mu = n \cdot p$

und $T \in \mathbb{R}$:

$$P(X=r): \text{binompdf}(n, p, r)$$

$$P(X \leq r): \text{binomcdf}(n, p, r)$$

Standardabweichung

$$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$$

Sigma-Regeln:

$$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68,3\%$$

$$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95,4\%$$

$$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99,7\%$$

Signifikanztest

Zweiseitig

1. Nullhypothese $H_0: p = p_0$; Alternative $H_1: p \neq p_0$
2. Festlegen Stichprobenumfang n & Signifikanzniveau (z.B. 5%)
3. $\text{binomcdf}(n, p_0, x)$ in Tabelle
4. Suche für x die kleinsten Zahlen a und b , sodass
 $P(X \leq a) \geq 2,5\%$ und $P(X \leq b) \geq 97,5\% \rightarrow [a, b]$

Linksseitig

1. Nullhypothese $H_0: p = p_0$; Alternative $H_1: p < p_0$
2. z.B. wie oben
4. Suche kleinstes a , dass $P(X \leq a) \geq 5\% \rightarrow [a, n]$

Rechtsseitig

1. Nullhypothese $H_0: p = p_0$; Alternative $H_1: p > p_0$
4. Suche kleinstes b , dass $P(X \leq b) \geq 95\% \rightarrow [0, b]$